ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS
Liberté
Égalité
Fraternité

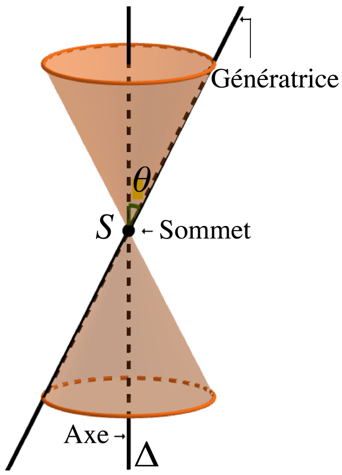
Inspection académique
inspection pédagogique régionale

Paraboles : constructions et propriétés

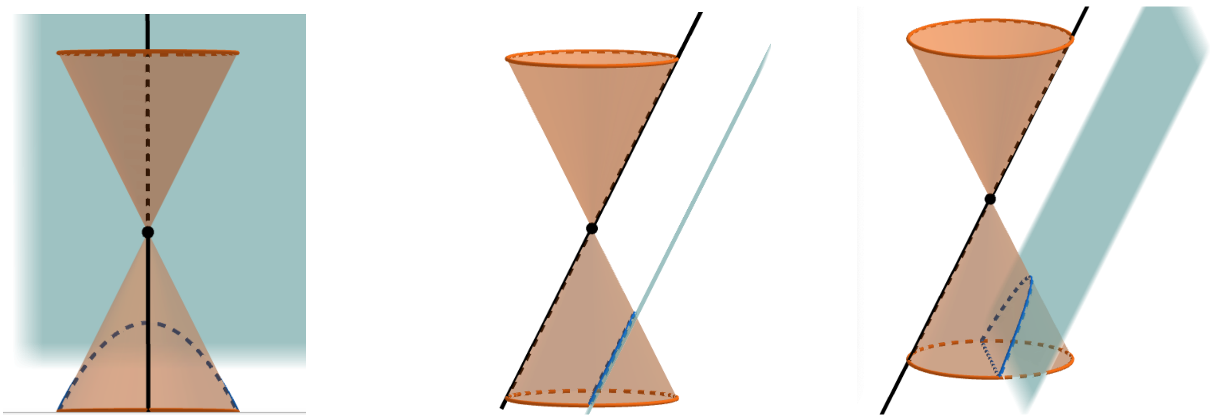
Les paraboles font partie des courbes appelées *coniques*, cette terminologie abrégeant l'expression *sections coniques*. Elles ont été étudiées par MENECHME d'abord au IV^{e} siècle avant J. C. puis par APOLLONIUS au III^{e} avant J.-C., qui leur a consacré un traité faisant apparaître comme connues la plupart des définitions et propriétés citées dans ce document, mises à part la définition monofocale, connue par PAPPUS (III^{e}) ainsi que la détermination géométrique des foyer(s) et directrice(s) grâce à la ou aux sphères inscrites tangentes aux plans sécants, mise quant à elle en évidence seulement au XIX^{e} et connue sous le nom de *théorème belge*.
Les paraboles apparaissent en mécanique comme trajectoires d'un objet en chute libre.
Les coniques sont également des objets d'étude en géométrie projective et en algèbre bilinéaire mais ces aspects ne seront pas abordés ici.

1 Parabole comme section d'un cône par un plan

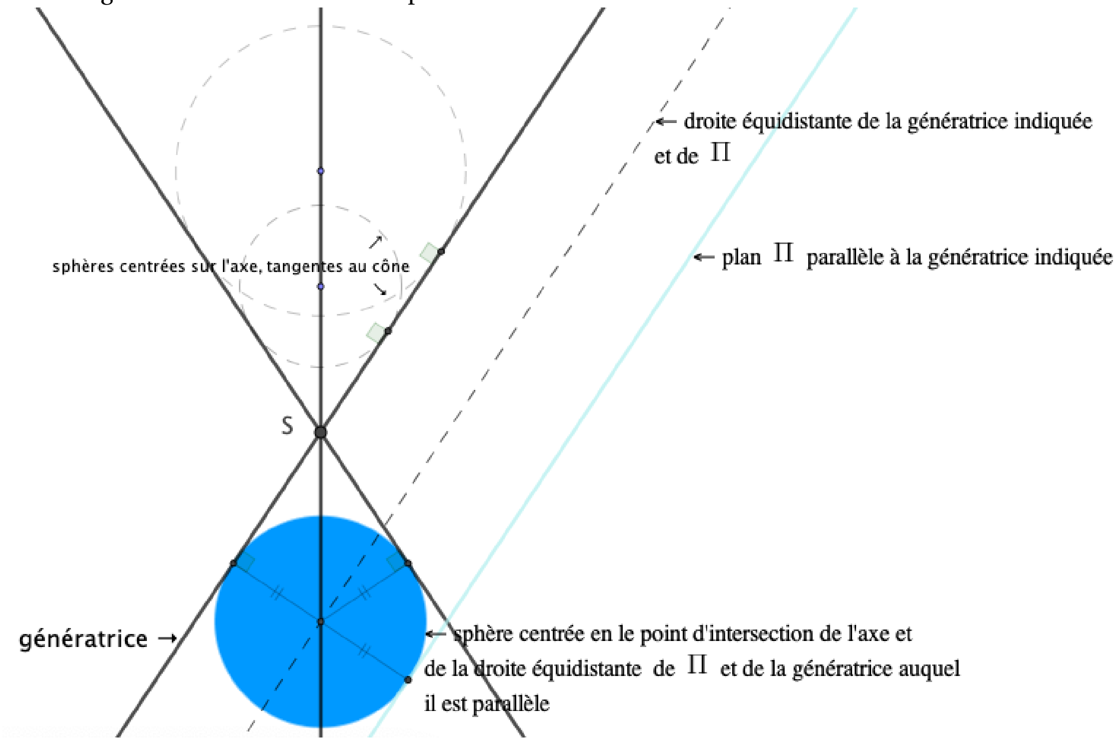
Une droite Δ et un point S de celle-ci étant donnés, le cône de révolution de sommet S et d'axe Δ est la réunion des droites issues de S qui forment avec Δ un angle θ de mesure fixe comprise entre 0 et 90 degrés. Ces droites sont par définition *les génératrices* du cône.



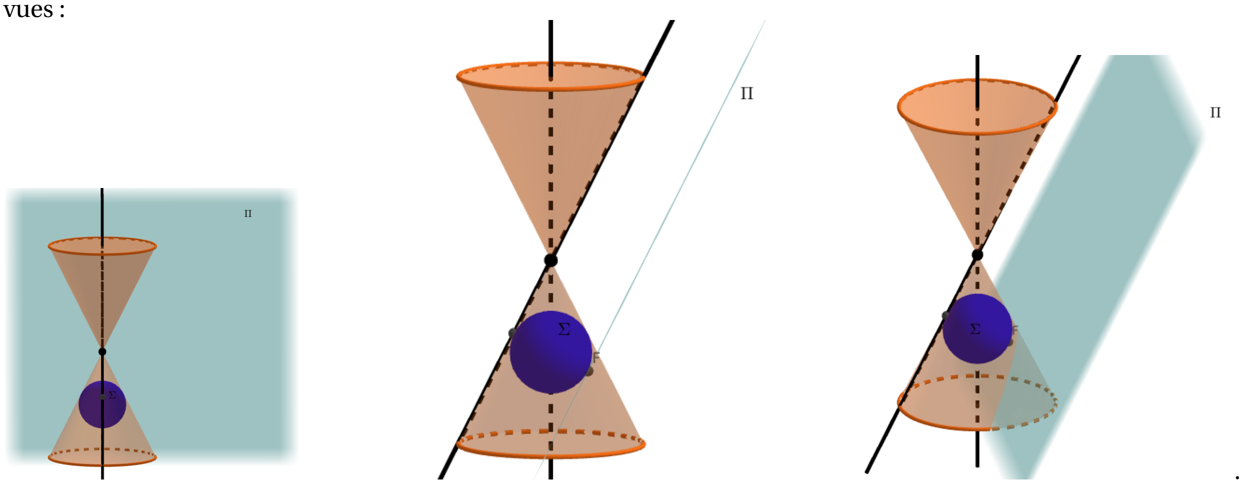
En reprenant les notations précédentes, une parabole $\mathscr{P}$ est la courbe obtenue par l'intersection d'un cône et d'un plan Π parallèle à l'une des génératrices du cône.
Ci-dessous sont représentées des vues de face, latérale et trois-quarts de la section d'un cône (en orange) par le plan bleuté, parallèle à la génératrice représentée en noir :



Pour des raisons de symétrie, les sphères dont le centre est un point de l'axe Δ de la parabole et parmi ces sphères, il en existe une dont le centre appartient à la droite située à égale distance du plan Π et de la génératrice et qui est donc tangente à la fois au cône et au plan Π. On admet ici son unicité.

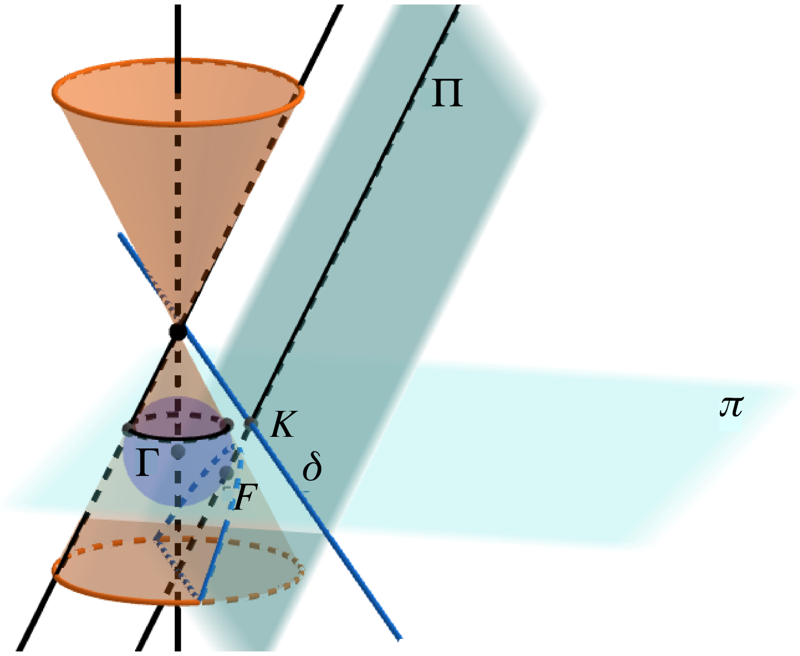


Considérons donc la sphère Σ inscrite dans le cône et tangente au plan Π ci-dessous représentée selon différentes vues :



Le point F désigne le point de contact entre la sphère Σ et le plan Π.

Notons Γ le cercle de contact de la sphère Σ et du cône et π le plan contenant ce cercle. Les deux plans Π et π sont non parallèles et l'on note δ leur intersection comme figurée ci-dessous :

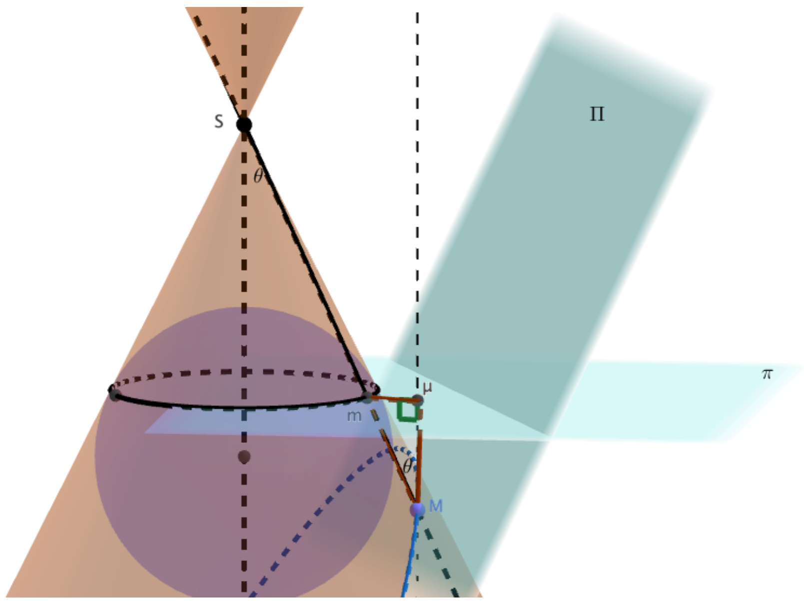


Déterminons la courbe intersection du plan Π et du cône. Soit M un point de cette courbe intersection.
On se propose à présent de démontrer l'équivalente suivante :

$$M \in \mathscr{P} \Longleftrightarrow M \in \Pi \text{ et } MF = MH$$

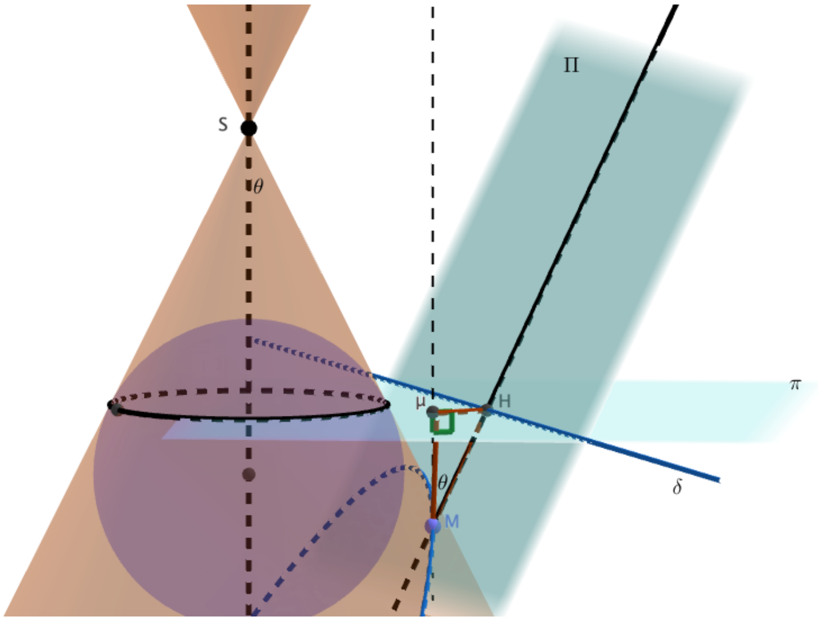
• Le point M étant un point du cône, la droite (SM) est une génératrice de celui-ci.
Désignons par m le point d'intersection du cercle de contact Γ et de (SM) et par μ le projeté orthogonal de M sur π. Le triangle $mM\mu$ est rectangle en μ et l'angle de sommet M est alterne-interne avec l'angle de sommet S que forment les droites (SM) et l'axe du cône, les droites $(M\mu)$ et l'axe du cône étant parallèles car toutes les deux orthogonales au plan π. Il vient :

$$M\mu = Mm\cos\theta$$



• Dans le plan Π, le point M se projette orthogonalement sur la droite δ (intersection des plans Π et π) en un point H. Le triangle $MH\mu$ est rectangle en μ et l'angle de sommet H est l'angle formé entre les deux plans π et Π, complémentaire à l'angle formé par l'axe du cône et n'importe laquelle de ses génératrices en raison du parallélisme de Π et de l'une des génératrices considérées. Il s'ensuit que dans le triangle $MH\mu$ rectangle en M, la mesure de l'angle de sommet M est θ et

$$M\mu = MH\cos\theta$$



Par transitivité de l'égalité, on obtient que le point M considéré vérifie :

$$Mm = MH$$

Enfin, désignant par Ω le centre de la sphère Σ, m et F sont par définition deux points de Σ donc $\Omega m = \Omega F$ et les deux triangles ΩmM et ΩFM sont deux triangles rectangles (M étant à la fois un point du plan tangent à la sphère Σ de centre Ω en m et un point du plan tangent à la sphère Σ de centre Ω en F) ayant leur hypoténuse $[\Omega M]$ commune et des côtés Ωm et ΩF isométriques. Ils sont donc superposables et $Mm = MF$.
Le point M, commun au cône et au plan Π vérifie donc $MF = MH$.
Le point M étant arbitraire parmi les points de la parabole envisagée, on en déduit que tous les points de cette courbe vérifient cette égalité.

Il reste à démontrer que si un point M du plan Π vérifie cette relation, alors c'est un point du cône.

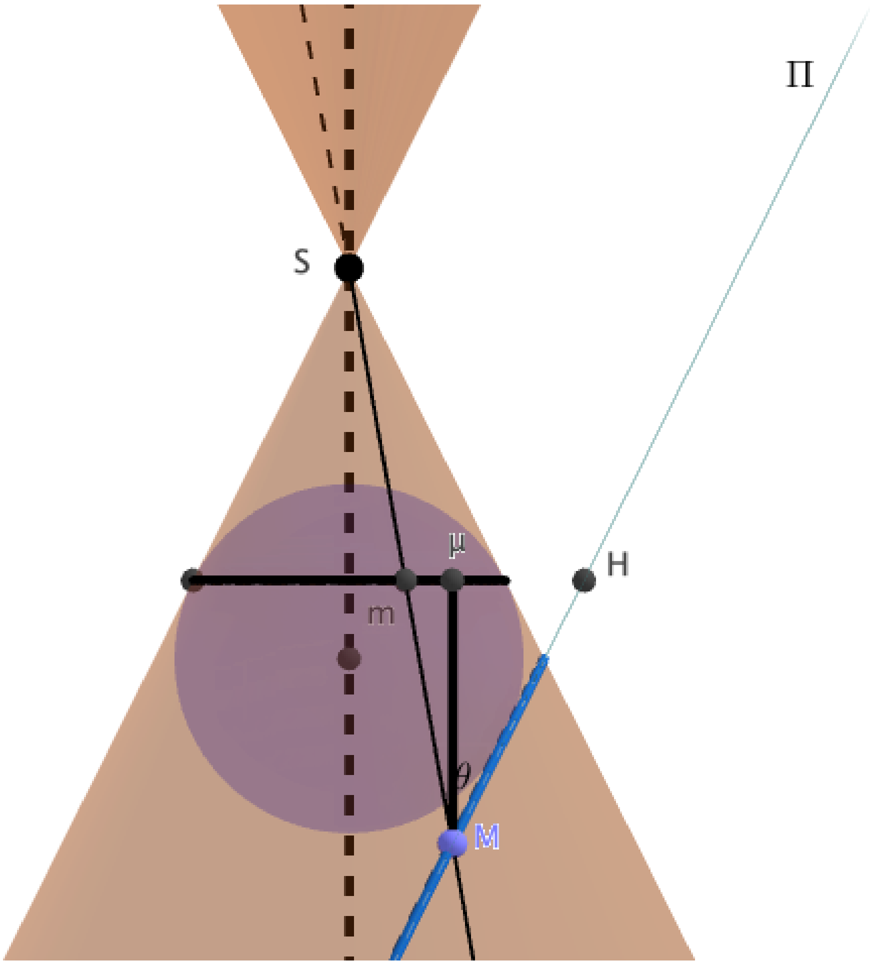
Soit M un point du plan Π vérifiant $MF = MH$.
De deux choses l'une : ou M est un point de la sphère Σ ou M n'est pas un point de la sphère Σ.

• Si M est un point de la sphère Σ, alors $M = F$ (point de contact entre Σ et Π).
Il s'ensuit que $MH = MF = 0$ donc que $M = H$: M serait un point du plan π et par suite un point du cercle de contact, lequel serait forcément un grand cercle, ce qui n'arrive que si Π est parallèle à l'axe du cône, ce qui est absurde !
Ce cas de figure ne peut donc pas se produire.

• Si M n'est pas un point de la sphère. La distance tangentielle de M à la sphère Σ (c'est-à dire la distance entre M et le point de contact de n'importe laquelle des tangentes à Σ issue de M) est fixe. Notons-la d (ici, $d = MF = Mm$). Notons μ le projeté orthogonal de M sur π, on a l'équivalence :

$$M \text{ appartient au cône si et seulement si } M\mu = d \times \cos\theta$$

Ici, en se plaçant dans le triangle $MH\mu$ rectangle en μ, on a $M\mu = MH \times \cos\theta$ et $MH = MF = d$, donc $M\mu = d \times \cos\theta$ et M est un point du cône. Étant par définition un point de Π, c'est bien un point de la parabole $\mathscr{P}$.



On a montré la propriété suivante :
L'intersection d'un cône de révolution et d'un plan ne passant pas par le sommet du cône et parallèle à une génératrice est l'ensemble des points M vérifiant l'égalité $MF = MH$ où F est un point fixe de l'espace et H est un point d'une droite donnée.

Vocabulaire : Le point F est appelé foyer et la droite à laquelle appartient H, définie comme intersection des plans Π de section du cône et π (plan du cercle de contact de la sphère et du cône) est appelée directrice.
La courbe obtenue est la parabole de foyer F et de directrice δ.

2 Équation cartésienne de la parabole donnée par son foyer et sa directrice

Munissons le plan Π précédemment considéré du repère orthonormé duquel δ est l'axe des abscisses et dans lequel F est le point de coordonnées $(0,\ p)$, $p > 0$.
Soit M le point du plan de coordonnées $(x,\ y)$. Le point H, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses a pour coordonnées $(x,\ 0)$. Le point M est un point de la parabole si et seulement si l'égalité $MF = MH$ est vérifiée, donc si $MF^2 = MH^2$ (les quantités en présence sont de même signe). En termes de coordonnées, on obtient que le point M est un point de la parabole si et seulement

$$(-x)^2 + (p - y)^2 = (x - x)^2 + (-y)^2$$

soit

$$x^2 + p^2 - 2py = 0$$

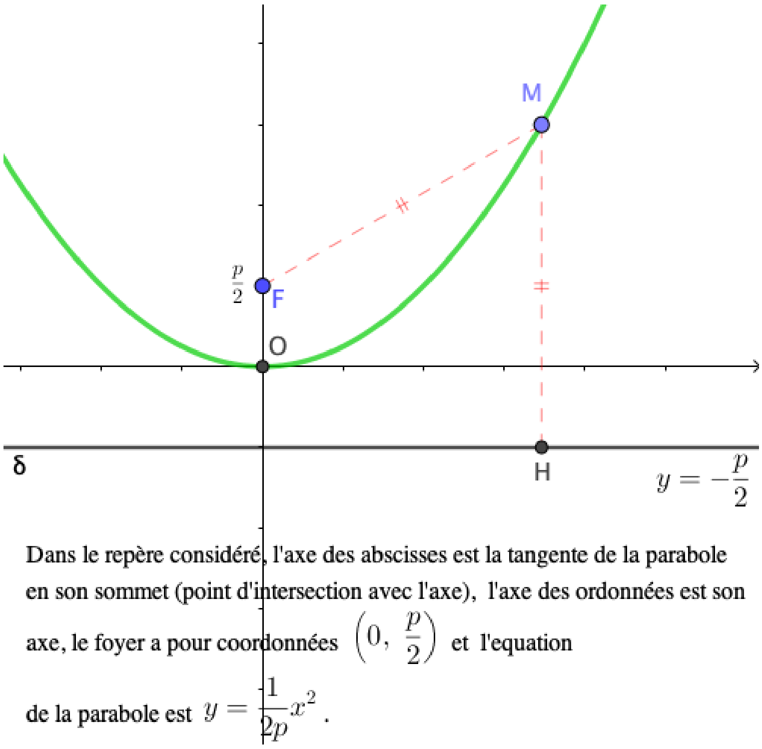
qui peut s'écrire

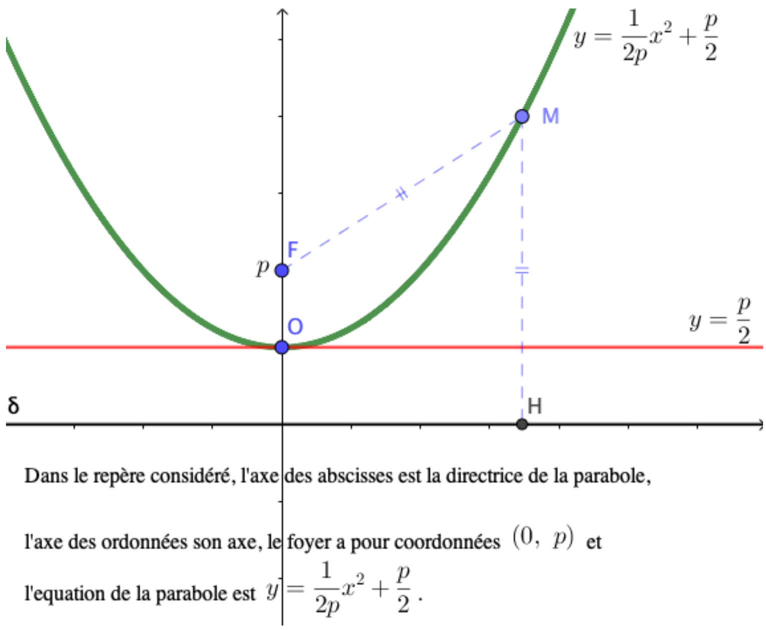
$$y = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}$$

ou encore

$$x^2 = 2p\left(y - \frac{p}{2}\right)$$

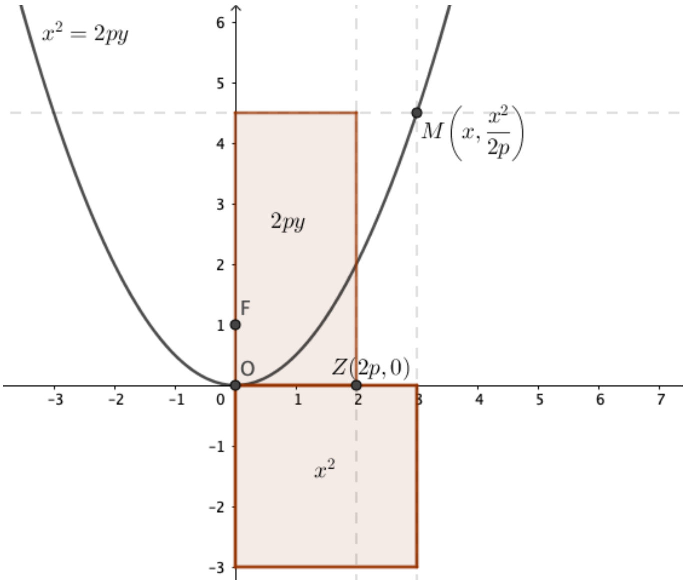
Dans le repère considéré, la parabole passe par le point $O\left(0\,;\,\frac{p}{2}\right)$ et la tangente à la parabole en ce point admet pour équation cartésienne réduite $y = \frac{p}{2}$.





3 Parabole comme lieu des poins de coordonnées $(x,\ y)$ dont la construction équivaut à celle d'un rectangle dont l'un des cotés a une longueur imposée $(2p)$ et dont la surface est égale à celle d'un carré de côté x

Pour $p > 0$, quitte à tanslater l'axe des abscisses du repère par un vecteur de coordonnées $\left(0,\ \dfrac{p}{2}\right)$, on peut considérer que les points $M(x,\ y)$ de la parabole d'équation $x^2 = 2py$ sont les points du plan de sorte que pour $x > 0$ l'aire du carré de côté x est la même que celle du rectangle dont l'une des dimensions est fixe $(2p)$ et l'autre est y.
Dans l'illustration ci-dessous, le point Z a pour coordonnées $(2p,\ 0)$.



Une parabole admet également également une équation polaire que nous n'évoquerons pas ici.

4 Quelques propriétés tangentielles et focales des paraboles

On se place dans le repère considéré au paragraphe 2 dans lequel la parabole a pour équation

$$y = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}$$

donc est la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}$$

polynomiale donc dérivable pour toute valeur de x et dont la dérivée f' est donnée pour tout réel x par

$$f'(x) = \frac{1}{p}x$$

Dans ce repère, en un point $M_0(x_0,\ y_0)$ de la courbe, celle-ci admet une tangente T_0 d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

soit, après calculs,

$$T_0 : \qquad y = \frac{1}{p}x_0 x - \frac{1}{2p}x_0^2 + \frac{p}{2}$$

Cette tangente T_0 coupe la directrice δ d'équation $y = 0$ au point I_0 de coordonnées $\left(\frac{1}{2}x_0 - \frac{p^2}{2x_0},\, 0\right)$ que l'on peut également écrire $\left(\frac{x_0^2 - p^2}{2x_0},\, 0\right)$.
Il peut être mené une seconde tangente à la parabole passant par le point I_0. Soit x_1 l'abscisse du second point de contact, on a :

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

qui vérifie

$$0 = \frac{1}{p}x_1\left(\frac{x_0^2 - p^2}{2x_0} - x_1\right) + \frac{1}{2p}x_1^2 + \frac{p}{2}$$

d'où l'on obtient après développement et multiplication de chaque terme par $2p$:

$$x_1^2 - \frac{x_0^2 - p^2}{x_0}x_1 - p^2 = 0$$

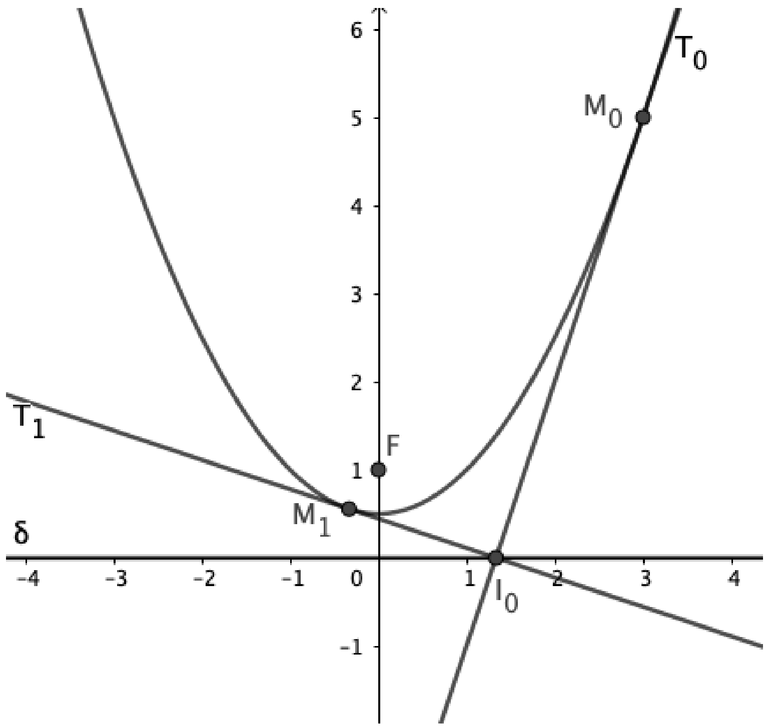
qui est une équation du second degré d'inconnue x_1 dont une solution est x_0 (abscisse de la première tangente passant par I_0 et peut donc se factoriser par $(x_1 - x_0)$. On obtient :

$$(x_1 - x_0)\left(x_1 + \frac{p^2}{x_0}\right)$$

ce qui fait apparaître que le point M_1 d'abscisse $x_1 = -\frac{p2}{x_0}$ comme le point de contact de la seconde tangente à la parabole passant par le point I_0 de la directrice.
Le coefficient directeur de cette seconde tangente est $f'(x_1) = f'\left(-\frac{p^2}{x_0}\right) = \frac{1}{p} \times \left(-\frac{p^2}{x_0}\right) = -\frac{p}{x_0}$.
Le produit des deux coefficients directeurs des tangentes $f'(x_0) \times f'(x_1)$ vaut

$$f'(x_0) \times f'(x_1) = \frac{1}{p}x_0 \times \left(-\frac{p}{x_0}\right) = -1$$

ce qui montre que les deux tangentes sont perpendiculaires.



On a montré l'implication suivante :
Si deux tangentes à une parabole sont sécantes en un point de la directrice de la parabole, alors elles sont perpendiculaires.

Reste à vérifier la réciproque.

Considérons deux tangentes distinctes T_1 et T_2 perpendiculaires à la parabole, courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}$, et étudions les coordonnées de leur point d'intersection.
Les points de tangentes sont désignés par M_0 et M_1 et ont pour abscisse respective x_0 et x_1.
Les équations des tangentes sont :

$$T_0 : \qquad y = \frac{1}{p}x_0 x - \frac{1}{2p}x_0^2 + \frac{p}{2}$$

et

$$T_1 : \qquad y = \frac{1}{p}x_1 x - \frac{1}{2p}x_1^2 + \frac{p}{2}$$

Le fait que les deux tangentes sont perpendiculaires implique que leurs coefficients directeurs ont -1 pour produit :

$$\frac{1}{p}x_0 \times \frac{1}{p}x_1 = -1 \qquad (*)$$

Les deux droites T_0 et T_1 sont perpendiculaires donc sécantes et leur point I d'intersection a pour coordonnées $(a,\ b)$ telles que a est solution de

$$\frac{1}{p}x_0 a - \frac{1}{2p}x_0^2 + \frac{p}{2} = \frac{1}{p}x_1 a - \frac{1}{2p}x_1^2 + \frac{p}{2}$$

soit

$$\frac{1}{p}(x_0 - x_1)a = \frac{1}{2p}(x_0^2 - x_1^2)$$

Comme les deux tangentes sont distinctes par hypothèses, les abscisses de leur point de tangence respectifs sont différentes et $x_0 - x_1 \neq 0$.
on peut alors simplifier l'égalité précédente qui, après multiplication par p, devient :

$$a = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

L'abscisse de I est le milieu du segment $[M_0M_1]$.
Calculons alors l'ordonnée b de I :

$$b = \frac{1}{p}x_0 a - \frac{1}{2p}x_0^2 + \frac{p}{2}$$

d'où

$$b = \frac{1}{p}x_0 \times \frac{x_0 + x_1}{2} - \frac{1}{2p}x_0^2 + \frac{p}{2}$$

soit

$$b = \frac{x_0 x_1}{2p} + \frac{p}{2}$$

Compte-tenu de l'égalité $(*)$ qui indique que $x_0 x_1 = -p^2$, on obtient :

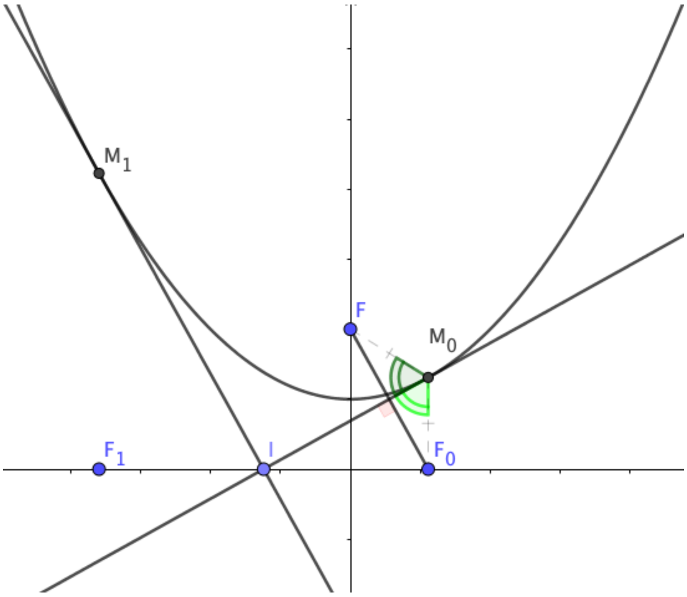
$$b = 0$$

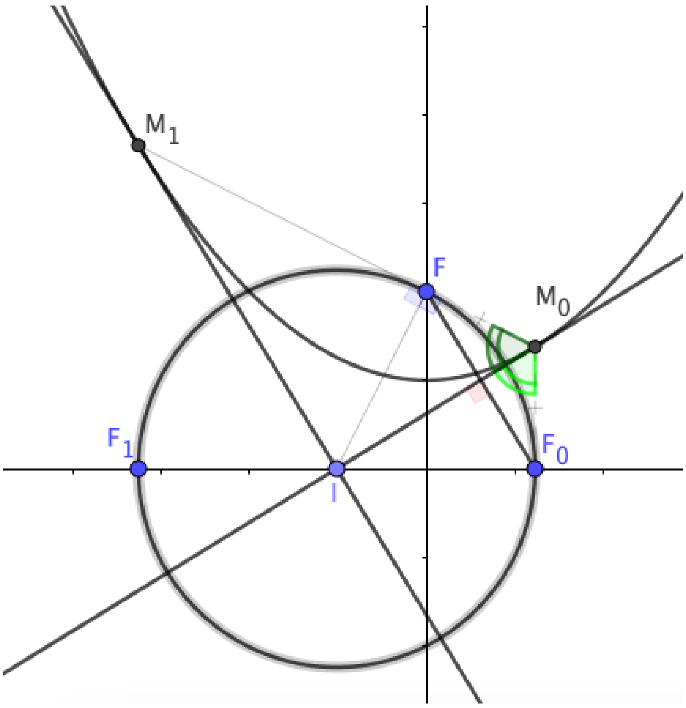
d'où l'on déduit que le point I est un point de l'axe des abscisses du repère, c'est-à dire de la directrice de la parabole du fait du choix du repère.

On vient d'établir le résultat suivant :

Propriété :
Deux tangentes distinctes à une parabole sont perpendiculaires si et seulement si leur point d'intersection est un point de la directrice de la parabole.

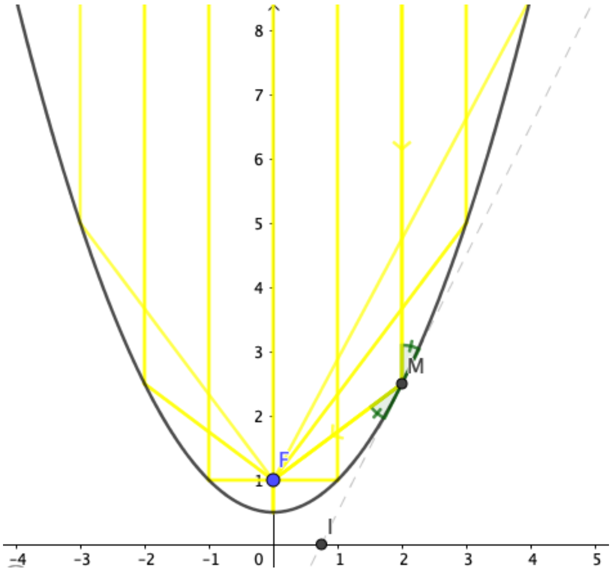
On pourrait en déduire une construction de la parabole grâce aux points d'intersection de deux paires de tangentes perpendiculaires.
Cependant, l'observation des figures suivantes va permettre une construction plus simple de la directrice connaissant la parabole, son foyer et deux de ses tangentes





On y observe (on ne va pas écrire les démonstrations ici) quatre résultats remarquables :

1. Le symétrique du foyer F de la parabole par rapport chacune de ses tangentes est un point de la directrice.
   Ici, le symétrique F_0 de F par rapport à la tangente T_0 issue de M_0 et le symétrique F_1 de F par rapport à la tangente T_1 issue de M_1 définissent la droite (F_0F_1) qui est la directrice δ de la parabole.
   La figure considère deux tangentes perpendiculaires, mais le résultat est vrai quel que soit le couple de tangentes distinctes considérées.
   Soit I le point d'intersection de la droite (F_0F_1) et de la médiatrice de $[FF_0]$, le point I est le centre du cercle passant par F, F_0 et F_1 où F_1 est le projeté orthogonal de M_1, point de contact de la parabole et de la tangente de celle-ci perpendiculaire à T_0.
2. En un point M donné de la parabole, la droite parallèle à l'axe de la parabole passant par M forme avec la tangente (MI) en M à la parabole un angle de même mesure qu'entre la droite (MF) et cette même tangente. C'est cette propriété qui est exploitée dans les miroirs paraboliques ou les fours solaires : tout rayon parallèle à l'axe de symétrie de la parabole (pris ici comme axe des ordonnées), par exemple frappant la parabole en un point (ici M) est réfléchi en un rayon passant par F.



3. Les droites (IM_0) et (IM_1) sont les bissectrices intérieures et extérieures des angles $\widehat{F_0IF}$ et $\widehat{FIF_1}$.
4. Le triangle FF_0F_1 est rectangle en F (F_0 et F_1 étant les projetés sur la directrice des points de contacts des tangentes à la parabole issues de I, point de la directrice, milieu de $[F_0F_1]$).

5 La quadrature de la parabole ou la façon de partager un rectangle en trois surfaces de même aire

Mise en garde : Ce paragraphe fait appel à la notion d'intégrale et ne pourra donc être pleinement compréhensible que par un lycéen ayant choisi la spécialité maths en terminale..

Soit p un réel strictement positif.

Considérons la fonction définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{2p}x^2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Soit a un réel strictement positif. Notons M le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse a. Les coordonnées de M sont $\left(a\,;\,\dfrac{1}{2p}a^2\right)$ et la tangente T_a a pour équation

$$T_a \qquad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

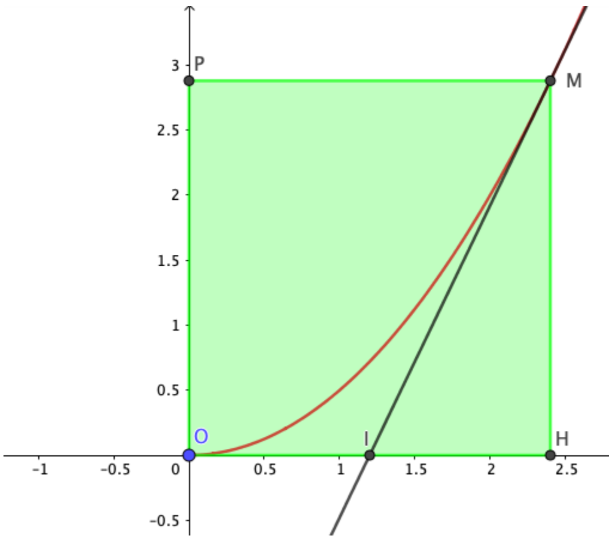
avec $f'(x) = \dfrac{1}{p}x$ d'où $f'(a) = \dfrac{1}{p}a$ et $f(a) = \dfrac{1}{2p}a^2$, il vient :

$$T_a \qquad y = \frac{1}{p}a(x-a) + \frac{1}{2p}a^2$$

soit

$$T_a \qquad y=\frac{1}{p}ax-\frac{1}{2p}a^2$$

Cette droite T_a coupe l'axe des abscisses en un point I de coordonnées $\left(\frac{1}{2}a\,;\,0\right)$, milieu du segment $[OH]$ où O est l'origine du repère qui coïncide avec le sommet de la parabole et le point H, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. L'axe des ordonnées est quant à lui coupé au point Q de coordonnées $\left(0\,;\,-\frac{1}{2}a\right)$, et qui s'avère donc être le symétrique de P par rapport à O.



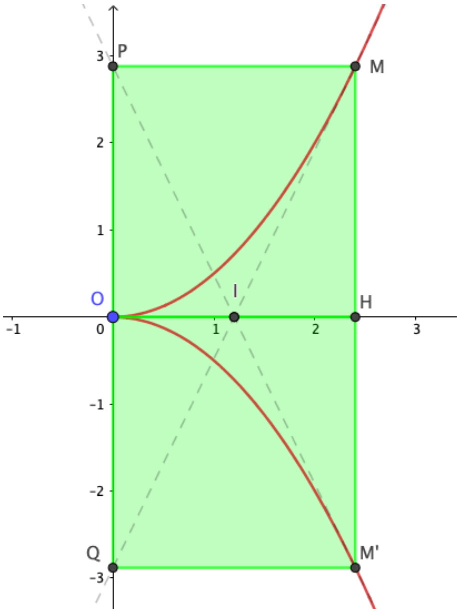
•Calculons l'aire du rectangle $OHMP$: ses dimensions sont $OH=a$ et $OP=f(a)=\frac{1}{2p}a^2$ donc

$$\mathscr{A}_{OHMP}=OH\times OP=\frac{1}{2p}a^3$$

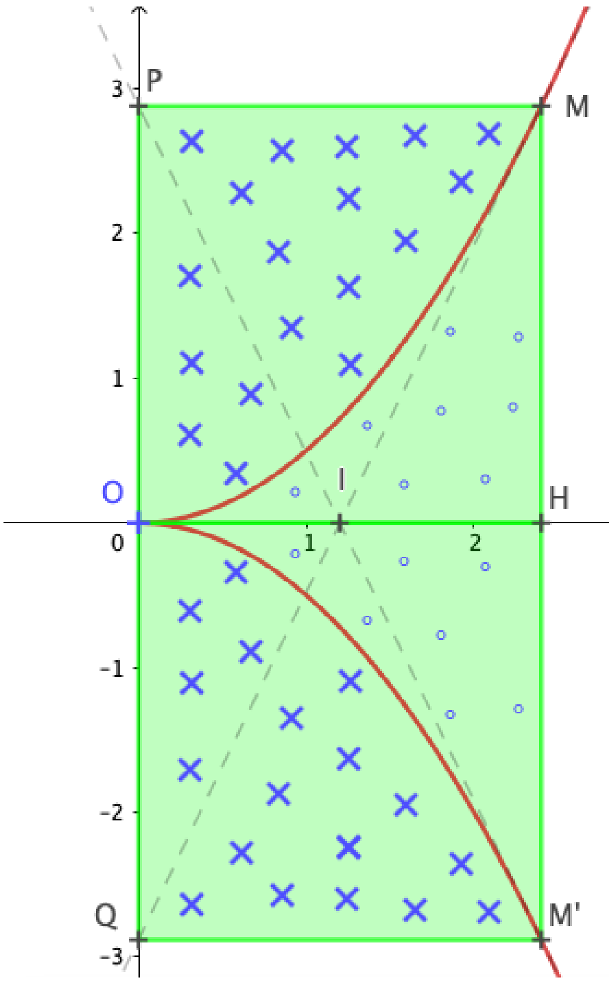
•Calculons l'aire de la portion de plan située en dessous de la parabole dans le rectangle.
Cette aire est donnée par l'intégrale entre 0 et a de $f(x)$. La fonction f étant polynomiale, elle est continue et admet par exemple pour primitive la fonction F définie par $F(x)=\frac{1}{2p}\times\frac{x^3}{3}=\frac{1}{6p}x^3$.
Ainsi, l'aire de la portion du rectangle située en dessous de la parabole vaut :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}&=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\\&=[F(x)]_0^a\\&=F(a)-F(0)\\&=\frac{1}{6p}a^3-0\\&=\frac{1}{6p}a^3\end{aligned}$$

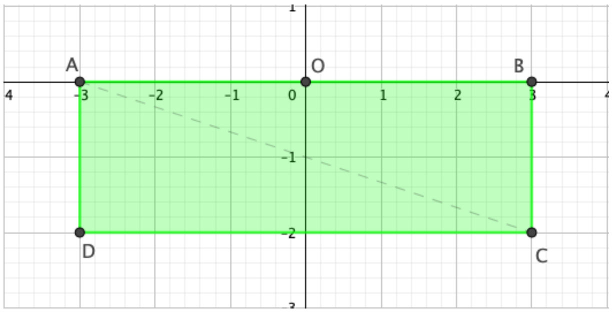
On observe un rapport de 1 à 3 entre ces deux aires;
Effectuons la symétrie de la figure considérée par rapport à l'axe des abscisses du repère :



Chacune des surfaces a pour aire $\dfrac{1}{6p}a^3$, a étant l'une des deux dimensions du rectangle, son autre dimension étant $\dfrac{1}{p}a^2$.



Un rectangle étant donné, on peut donc trouver au moins un découpage en trois surfaces de mêmes aire. En effet, un rectangle de dimensions toutes les deux non nulles L et ℓ étant donné, on peut considérer ayant l'un de ses axes de symétrie comme axe des ordonnées et un côté pour axe des abscisses, le milieu O de ce côté donnant l'origine du repère. Dans le repère considéré, on peut alors attribuer aux sommets A, B, C et D du rectangle les coordonnées respectives $\left(-\frac{L}{2}\ ;\ 0\right)$, $\left(\frac{L}{2}\ ;\ 0\right)$, $\left(\frac{L}{2}\ ;\ -\ell\right)$ et $\left(-\frac{L}{2}\ ;\ -\ell\right)$ comme figuré ci-dessous :

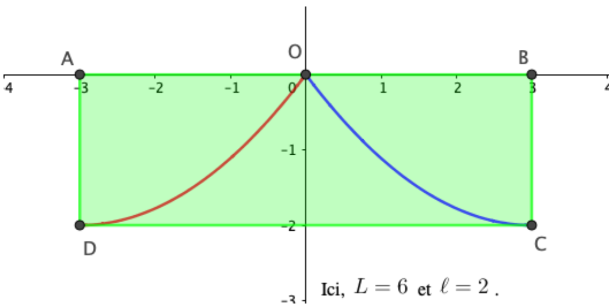


La parabole de sommet C et passant par O représente la restriction aux valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{L}{2}$ de la fonction f polynomiale de degré 2 définie par

$$f(x) = 4\frac{\ell}{L^2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 - \ell, \qquad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

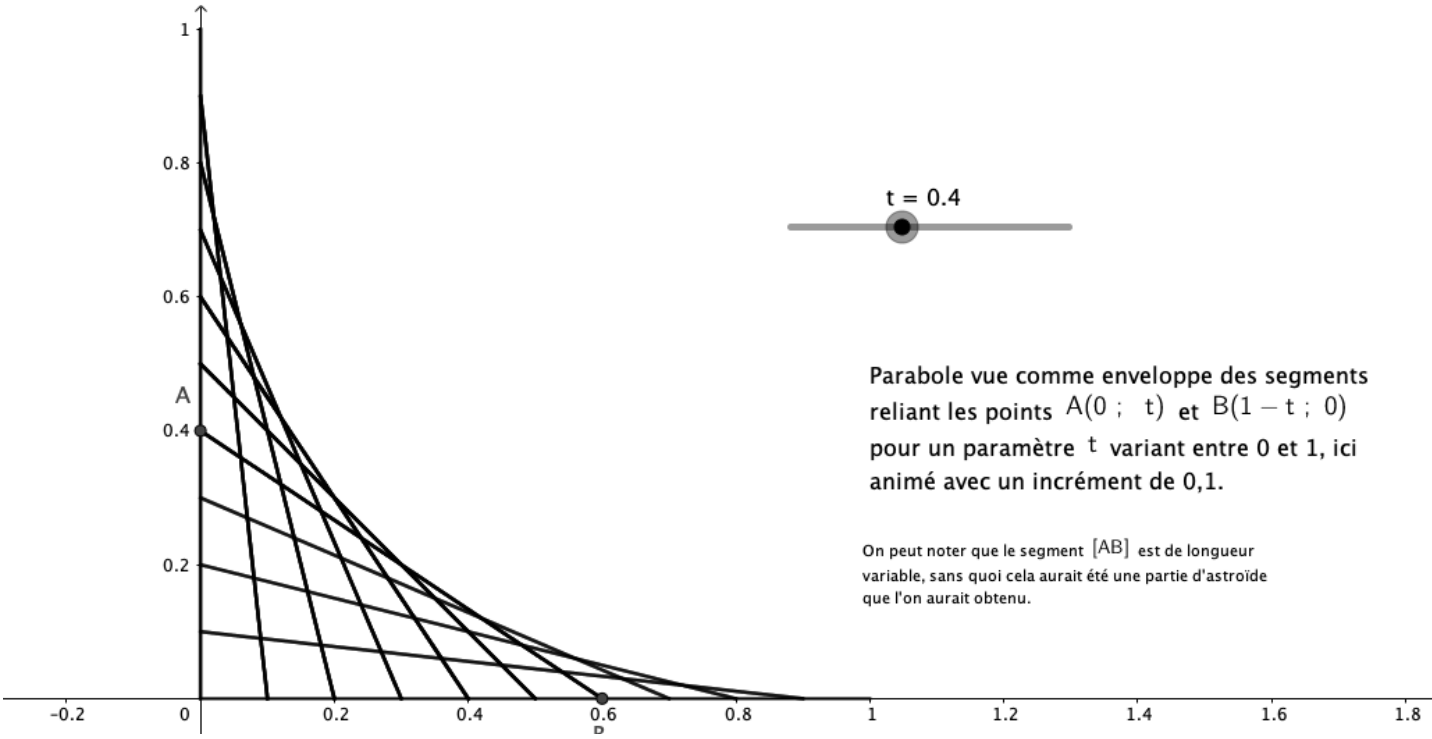
et sa courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :

$$f(x) = 4\frac{\ell}{L^2}\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 - \ell, \qquad -\frac{L}{2} \leq x \leq 0$$



Ici, $L = 6$ et $\ell = 2$.

Il est évident que les paraboles ont bien d'autres propriétés, notamment numériques (on peut penser au crible de Mattiasevich), et que la théorie des enveloppes aurait également été intéressante à exposer.



On pourra avec profit lire les références citées ci-après…

6 Quelques lectures sur ce sujet…

GRAMAIN (André), *Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris (1997)

L'article p. 124 (et suivantes) sur les coniques écrit par M. WARUSFEL (André), *Dictionnaire des Mathématiques* de l'Encyclopædia Universalis, Albin Michel, Manchecourt (1997)

MEHL (Serge), le site ChronoMath : http ://serge.mehl.free.fr/anx/coniques.html